Beispiel. Wir betrachten nun $Y^3 - X^4$. Diese Kurve hat eine Singularität mit Multiplizität 3 in $(0,0)$, obwohl sie glatt aussieht. Das erkennt man daran, dass:

$$\partial_x f_{-} 4X^3, \partial_y f = 3Y^2$$

$$\Leftrightarrow \partial_x f(0,0) = 0 = \partial_y f(0,0)$$

Wir stören unsere Kurve nun und erhalten:

$$Y^3 - \alpha Y^2 X - X^4, f_3 = Y^2(Y - \alpha X)$$

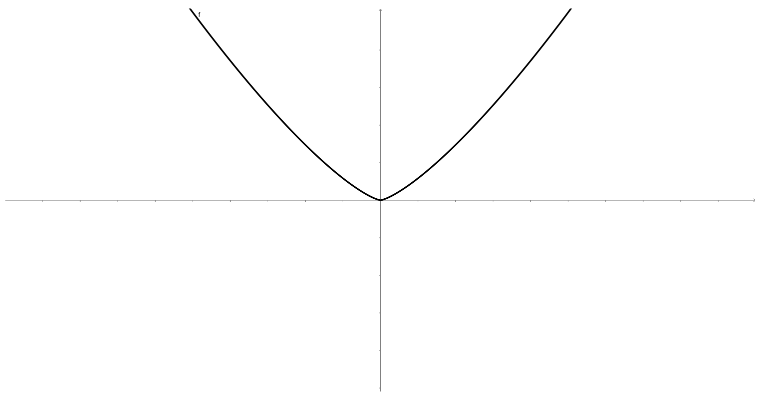


Abbildung 1: $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$

Für verschiedene α erhält man folgende Kurven:

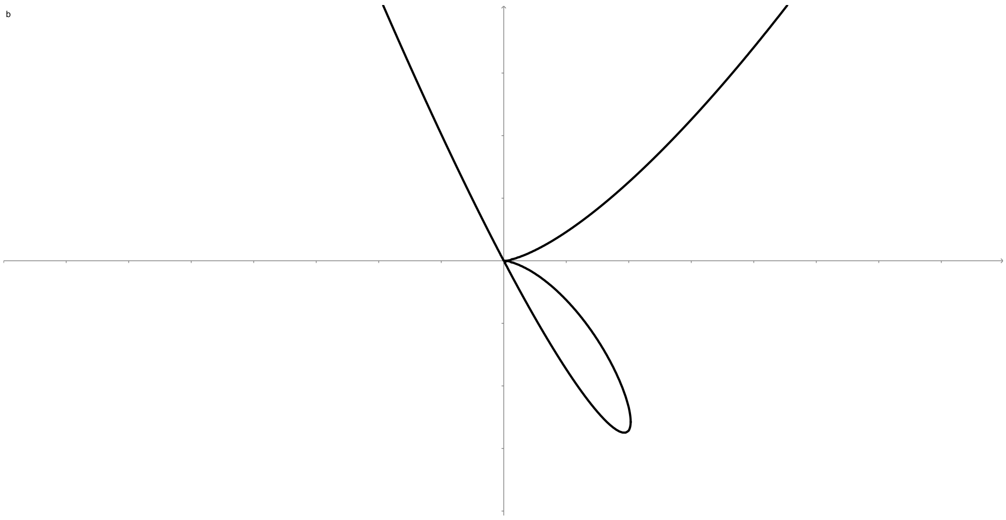


Abbildung 2: Für $\alpha < 0$

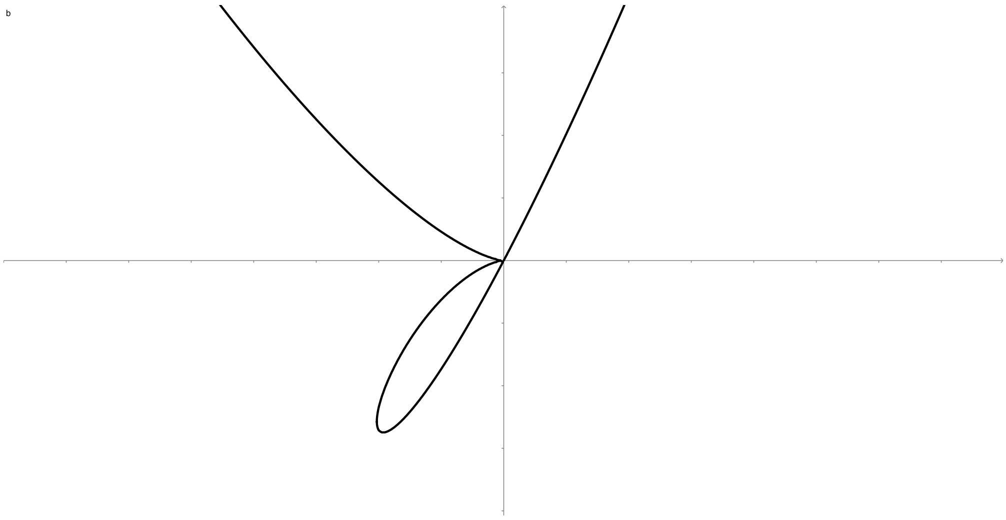


Abbildung 3: Für $\alpha > 0$

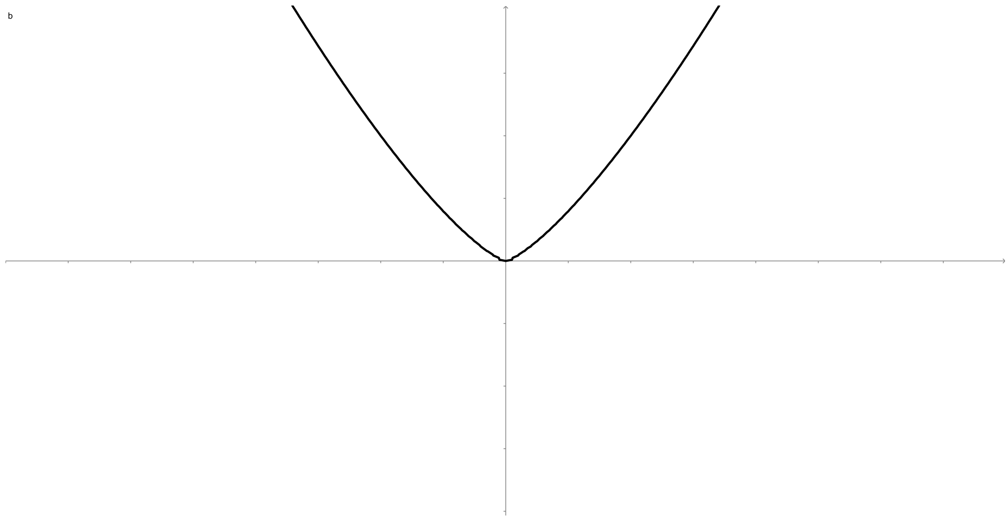


Abbildung 4: Für $\alpha = 0$

Beispiel. Nun betrachten wir eine ähnliche Störung $Y^3 - \alpha Y X^2 - X^4$ wobei hier nun $f_3 = Y(Y - \sqrt{\alpha}X)(Y + \sqrt{\alpha}X)$

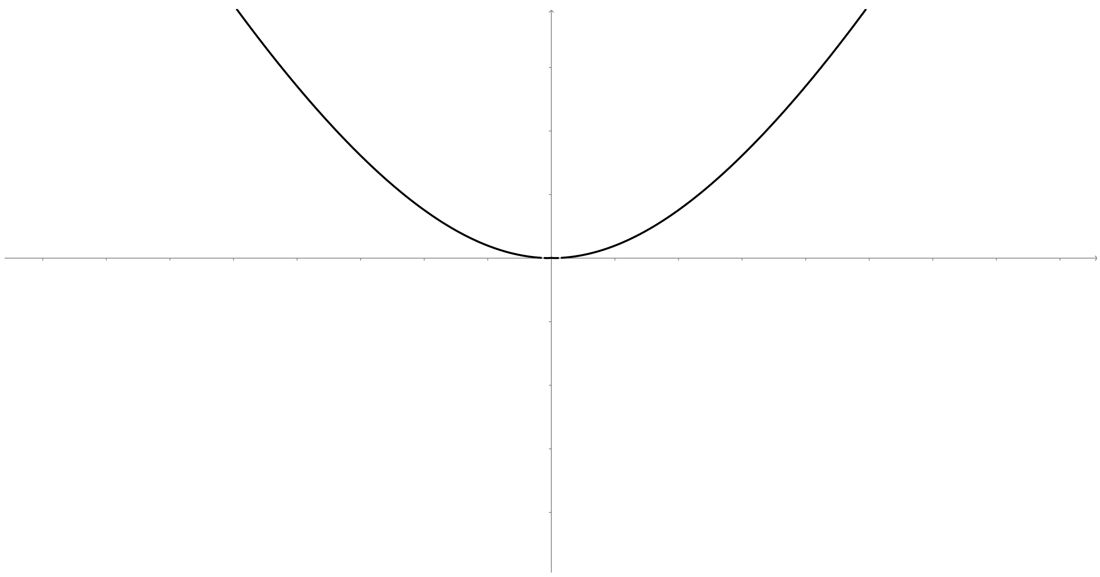


Abbildung 5: Für $\alpha < 0$

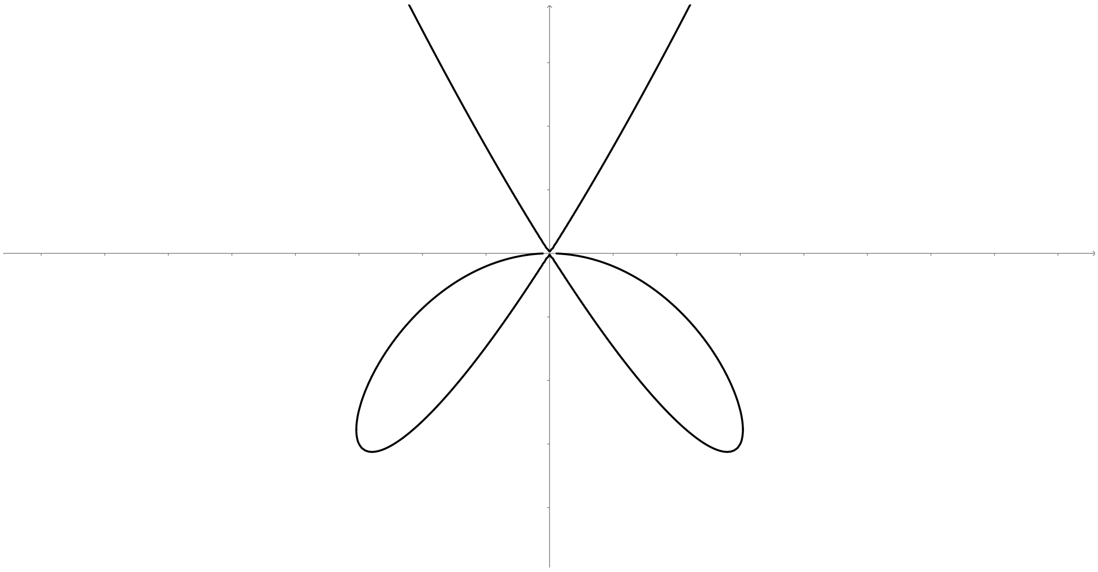


Abbildung 6: Für $\alpha > 0$

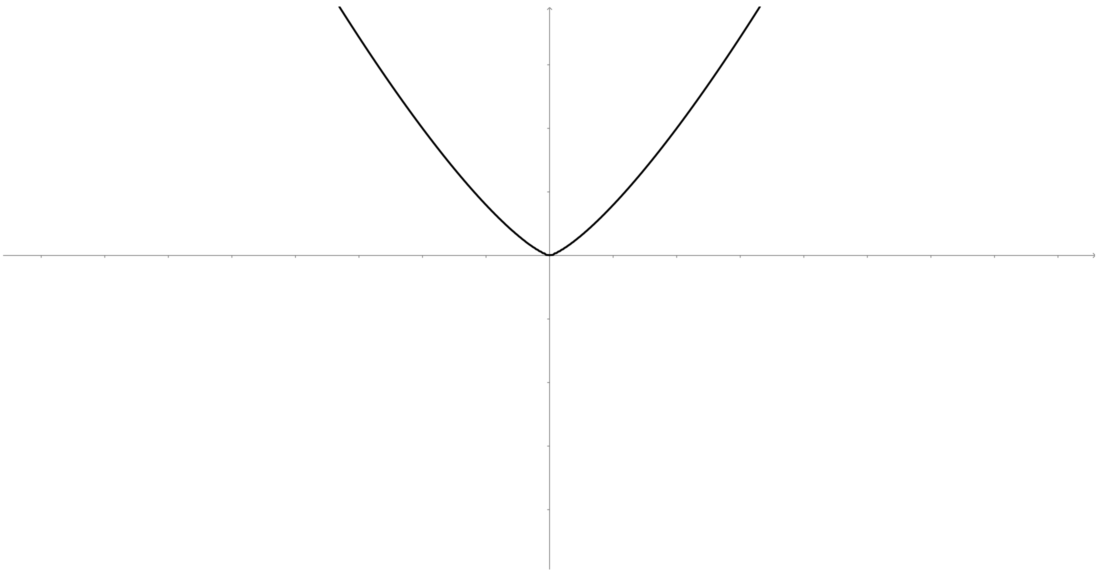


Abbildung 7: Für $\alpha = 0$

(3.3) Schnitt mit einer Gerade

Sei $C = V(f)$ wobei f die reduzierte Gleichung ist, $P \in C, P = (a, b)$, L Gerade durch P mit Steigung α/β. Dann ist die Parameterform der Gerade:

$$t \mapsto x(t), y(t) = a + \beta t, b + \alpha t$$

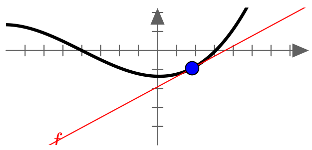


Abbildung 8: Tangente an $(p, f(p))$

Definition. *Die Schnittmultiplizität von C und L in P wird definiert durch:*

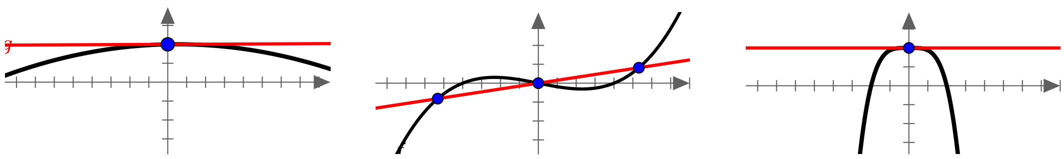
$$I(C, L; P) = Ord_0 \varphi(t), \varphi(t) = f(a + \beta t, b + \alpha t) \in \mathbb{C}[t]$$

Falls $\varphi(t) = 0$ so gilt $L \subset C$ und man könnte sagen $I = \infty$

Proposition. Es gilt:
$I(C \cup C', L; P) = I(C, L; P) + I(C', L; P)$, falls $\#(C \cap C') < \infty$
$I(C, L; P) \geq \text{Mult}_P(C)$
$T(C, L; P) > \text{Mult}_P(C) \Leftrightarrow$ L singuläre Tangente von C an P

Beweis. O.b.d.A. sei $P = (0, 0)$ und $f = f_k + \ldots + f_d$ dann ist die Parameterform der Geraden $t \mapsto (t\beta, t\alpha)$
$\Rightarrow \varphi(t) = f_k(t\beta, t\alpha) + \ldots + f_d(t\beta, t\alpha) = t^k f_k(\beta, \alpha) + \ldots + t^d f_d(\beta, \alpha)$
$\Rightarrow \text{Ord}_0(\varphi(t)) \geq k$ und genau k wenn $f_k(\beta, \alpha) = 0 \Leftrightarrow$ singuläre Tangente $\square$

Definition. *L heißt Tangente von C an p, wenn $I(C, L; P) \geq 2$. Sei $p \in C$ regulärer Punkt.*
$I(C, L; P) = 2 \Leftrightarrow L$ ist regulärer Tangente
$I(C, L; P) = 3 \Leftrightarrow L$ ist Wendetangente
$I(C, L; P) \geq 4 \Leftrightarrow P$ ist ein Flachpunkt
Sei $p \in C$ singulärer Punkt, also $I(C, L; P) \geq Mult_P(C) \geq 2$, dass heißt jede Gerade durch P zählt als Tangente



(a) $I = 2$ (b) $I = 3$ (c) $I = 4$

Satz (Baby-Bêzout)**.** Sei C eine Kurve und L eine Gerade. Wenn die Richtung von L keine asymptotische Richtung von C ist gilt:

$$\sum_{P \in C \cap L} I(C, L; P) = \mathrm{Grad}(C)$$

Beweis. Wir parametrisieren L zu $t \mapsto x(t), y(t), f = f_1 + \ldots + f_d$.
Dann folgt: $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ und $Grad(\varphi(t)) = Grad(f) = Grad(C)$, da die Richtung von L keine asymptotische Richtung von C ist. $\varphi(t)$ hat genau $Grad(\varphi)$ viele Nullstellen mit Vielfachheit gezählt. □

Korollar (Anwendung von Baby-Bêzout)**.** *Eine irreduzible Kurve mit $P \in C$ mit der Eigenschaft $Mult_P(C) = Grad(C) - 1$ ist rational parametrisierbar.*

Beweis. Die Gerade L durch P schneidet C in höchstens einem weiteren Punkt von C.

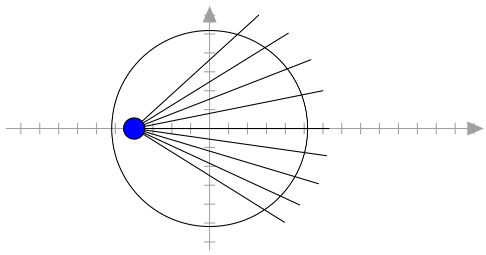


Abbildung 10: Jede Gerade geht durch einen weiteren Punkt

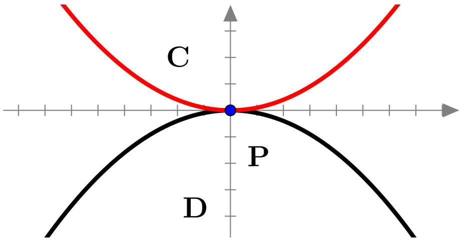
Per Rechnung:
O.b.d.A. sei $P = (0, 0)$ und $f = f_{d-1}(X, Y) + f_d(X, Y)$, so folgt mit $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\beta t, \alpha t)$:

$$\begin{aligned} & f_{d-1}(\beta t, \alpha t) + f_d(\beta t, \alpha t) \\ &= t^{d-1} f_{d-1}(\beta, \alpha) + t^d f_d(\beta, \alpha) \\ &= t^{d-1}(f_{d-1}(\beta, \alpha) + t f_d(\beta, \alpha)) \\ \Rightarrow t &= -\frac{f_{d-1}(\beta, \alpha)}{f_d(\beta, \alpha)} \end{aligned}$$

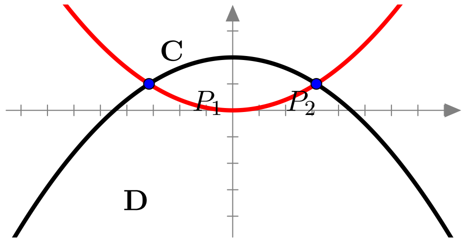
Also ist die Parametrisierung von C:

$$s \mapsto \left(-\frac{f_{d-1}(1, s)}{f_d(1, s)}, -\frac{f_{d-1}(1, s)}{f_d(1, s)} s \right) = (x(s), y(s)) \in C$$

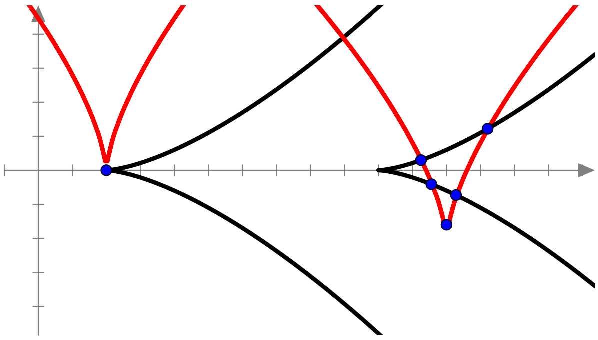
□



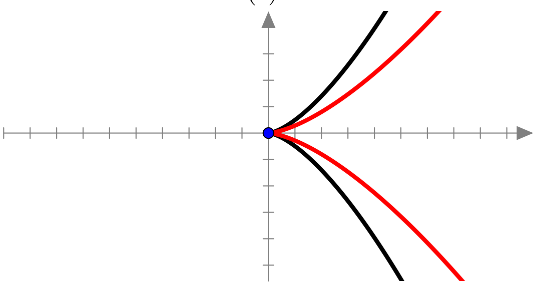
(a) Zwei Parabeln berühren sich mit welcher Schnittmultiplizität?



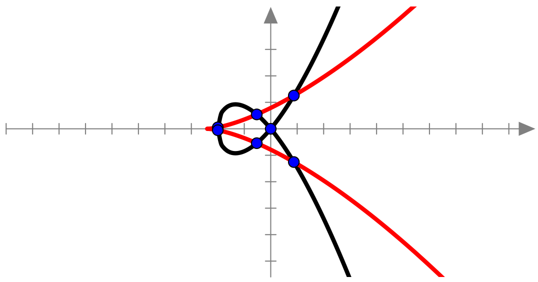
(b) Durch eine kleine Störung erkennen wir $I = 2$



(c) Durch eine kleine Störung erkennen wir $I = 4$



(d) Zwei verschieden gestauchte Kuspen berühren sich



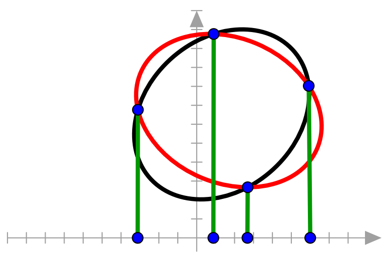
(e) Durch eine kleine Störung erkennen wir $I = 6$

(3.4) Schnittmultiplizitaet via Resultante

Ziel: Die Schnittmultiplizität von Geraden auf allgemeine ebene algebraische Kurven zu verallgemeinern. Also $I(C, L; P) \hookrightarrow I(C, D; P)$. Wir wollen:

1. $I(C, D; P) \in \mathbb{N}_0$, $P \in C \cap D : I(C, D; P) \geq 1$ und $I(C, D; P) = 1, T_P(C) \neq T_P(D), \mathrm{Mult}_P(C) = \mathrm{Mult}_P(D)$
2. $I(C, D; P) = I(D, C; P)$
3. $I(C \cup C', D; P) = I(C, D; P) + I(C', D; P)$
4. $I(C, D; P) \geq \mathrm{Mult}_P(C) \cdot \mathrm{Mult}_P(D)$
5. $I(C, D; P) > \mathrm{Mult}_P(C) \cdot \mathrm{Mult}_P(D) \Leftrightarrow$ C und D haben keine gemeinsame singuläre Tangente in P

Provisorische Definition (von $I(C, D; P)$)**.** Seien C, D Kurven ohne gemeinsame Komponente ($\Leftrightarrow \#(C \cap D) < \infty$) und wir wählen durch Drehung neue Koordinaten, sodass ∞ keine asymptotische Richtung von C und D und ∞ keine Richtung von Verbindungsgeraden von $C \cap D$.
Weiter sei $Grad(C) = d$, $Grad(D) = e$ und es seien $f = a_0 Y^d + \ldots + a_d$ und $g = b_0 Y^e + \ldots + b_e$ mit $a_0, b_0 \neq 0$. Für jede Nullstelle der Resultante existiert ein Schnittpunkt von C und D. Wir setzen $I(C, D; P) := \mathrm{Ord}_a(R_{f,g}), P = (a, b)$.



(a) Drehung bis Schnittpunkte ungleich

Probleme:

- Wir wissen nicht ob diese Definition unabhängig von der Wahl der neuen Koordinaten ist.
- Die dynamische Interpretation der Schnittmultiplizität ist hier nicht erkennbar.

Satz. (von Bêzout im affinen Fall) Seien C, D Kurven ohne gemeinsame Komponente. Wenn C, D keine gemeinsame asymptotische Richtung haben gilt:

$$\sum_{P \in C \cap D} I(C, D; P) = \mathrm{Grad}(C) \cdot \mathrm{Grad}(D)$$